

## LES ORBITES PÉRIODIQUES DANS LE PROBLÈME DE HILL

PAR

J.-F. STEFFENSEN

Le plus simple des cas particuliers du Problème des trois Corps qui ont de l'importance pour l'Astronomie a été reconnu par G. W. Hill, lequel a aussi fait le premier pas vers la solution de ce problème qu'on pourra donc nommer à juste titre „le problème de Hill“. Ses travaux sur ce sujet commencent par un mémoire publié en 1878 dans le premier tome de l'„American Journal of Mathematics“; ses recherches se trouvent réunies dans „The Collected Mathematical Works of George William Hill“, et l'esprit de ses méthodes, devenues classiques, a fécondé les traités de Mécanique Céleste modernes.

Dans ces conditions, nous pouvons supposer connue la forme des équations de Hill; en les écrivant, nous n'avons qu'à rappeler en quelques mots leur signification.

Les équations de Hill définissent le mouvement relatif d'un point matériel de masse nulle, attiré suivant la loi de Newton vers deux corps se mouvant dans des cercles suivant cette loi. De ces deux derniers corps, l'un est de masse négligeable par rapport à l'autre, et la distance du point de masse nulle à la plus petite des autres masses est supposée négligeable par rapport à la distance des deux dernières entre elles. Tout le mouvement a lieu dans un même plan. Je renvoie, pour plus de détails, aux œuvres citées plus haut.

Soient les coordonnées rectangulaires  $p$  et  $q$ , soit la distance de l'origine  $r$  et le temps  $t$ , alors les équations de Hill seront :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 p}{dt^2} - 2 \frac{dq}{dt} &= 3p - \frac{p}{r^3} \\ \frac{d^2 q}{dt^2} + 2 \frac{dp}{dt} &= -\frac{q}{r^3}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Ces équations admettent l'intégrale, dite de Jacobi,

$$\left( \frac{dp}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 = 3p^2 + \frac{2}{r} - C, \quad (2)$$

où  $C$  désigne „la constante de Jacobi“.

L'idée qui a guidé Hill dans le traitement de ces équations, c'est de chercher à les transformer de sorte qu'elles deviennent du second degré par rapport aux coordonnées et aux coefficients différentiels. Alors on trouve, pour la détermination des coefficients d'une série de Fourier, des formules récursives, encore assez compliquées, mais permettant au moins de déterminer les coefficients par un calcul numérique.

Pour obtenir ce résultat, le plus important est d'éliminer la quantité  $\frac{1}{r^3}$  des équations (1). A cet effet Hill prend pour variables  $p + iq$  et  $p - iq$ ; les équations transformées contiennent seulement  $\frac{1}{r}$  au lieu de  $\frac{1}{r^3}$ . En éliminant ensuite  $\frac{1}{r}$  par l'intégrale de Jacobi, on voit que les équations prennent la forme cherchée.

La méthode de Hill a été appelée „méthode aux coordonnées rectangulaires“ (voir BROWN: Lunar Theory). On a même dit que ces dernières sont, à tout égard, plus simples que les coordonnées polaires pour la théorie de la lune (voir la préface par POINCARÉ aux „Collected Works“ de Hill).

Il semble pourtant qu'on ait attribué trop d'importance aux coordonnées employées. Les relations entre les coordonnées rectangulaires et polaires sont tellement simples qu'on était en droit d'admettre à l'avance que les dernières pourraient aussi être adaptées aux recherches en question.

Il y a plus: Si l'on se propose de déterminer les orbites

qui seront périodiques seulement après un nombre de révolutions donné d'avance, on est tout naturellement conduit à introduire, comme variable indépendante au lieu du temps, l'angle compris entre l'axe des abscisses et le rayon vecteur. Ce seul fait semble établir l'importance des coordonnées polaires; nous verrons, dans ce qui suit, qu'elles présentent encore d'autres avantages pour notre problème.

Pour introduire ces coordonnées, mettons d'abord (1) sous la forme canonique. On pose

$$\left. \begin{aligned} p' &= \frac{dp}{dt} - q \\ q' &= \frac{dq}{dt} + p, \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} (p'+q)^2 + \frac{1}{2} (q'-p)^2 - \frac{3}{2} p^2 - \frac{1}{r} \\ &= -\frac{1}{2} C \end{aligned} \right\} (4)$$

et les équations deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial p'}, & \frac{dp'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p}, \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial q'}, & \frac{dq'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial q}; \end{aligned} \right\} (5)$$

(4) représente l'intégrale de Jacobi.

Soit  $l$  l'angle du rayon vecteur avec l'axe des  $p$ ; alors de nouvelles variables canoniques  $r, r', l, l'$  seront définies par les équations

$$\left. \begin{aligned} p &= r \cos l, & p' &= r' \cos l - \frac{l'}{r} \sin l, \\ q &= r \sin l, & q' &= r' \sin l + \frac{l'}{r} \cos l. \end{aligned} \right\} (6)$$

On voit bien que cette transformation est canonique, car l'expression

$$(p'dp + q'dq) - (r'dr + l'dl)$$

est nulle et, par conséquent, c'est une différentielle exacte.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> POINCARÉ: LEÇONS de Mécanique Céleste (Paris 1905) I, p. 3.

On aura donc le système transformé en exprimant  $F$  par les nouvelles variables. Le résultat est :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial r'}, & \frac{dr'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial r}, \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l'}, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial l}, \end{aligned} \right\} (7)$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{r'^2}{2} + \frac{l'^2}{2r^2} - l' - \frac{1}{r} - \frac{1}{4}r^2(1 + 3 \cos 2l) \\ &= -\frac{1}{2}C. \end{aligned} \right\} (8)$$

En développant les seconds membres de (7), on aura :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r', & \frac{dr'}{dt} &= \frac{l'^2}{r^3} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2}r(1 + 3 \cos 2l), \\ \frac{dl}{dt} &= \frac{l'}{r^2} - 1, & \frac{dl'}{dt} &= -\frac{3}{2}r^2 \sin 2l. \end{aligned} \right\} (9)$$

Introduisons les nouvelles variables  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  définies par les équations

$$r = \frac{1}{\sigma}, \quad r' = \frac{\rho}{\sigma}, \quad l' = \frac{\omega}{\sigma^2} \quad (10)$$

et éliminons en même temps  $dt$  entre les équations (9); on obtient après un petit calcul élémentaire les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (\omega - 1) \frac{d\sigma}{dl} &= -\sigma\rho, \\ (\omega - 1) \frac{d\rho}{dl} &= \omega^2 - \rho^2 - \sigma^3 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2l, \\ (\omega - 1) \frac{d\omega}{dl} &= -2\rho\omega - \frac{3}{2} \sin 2l \end{aligned} \right\} (11)$$

avec l'intégrale de Jacobi

$$\frac{1}{2}\rho^2 + \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \omega\right) - \frac{1}{4}(1 + 3 \cos 2l) + \left(\frac{1}{2}C\sigma^2 - \sigma^3\right) = 0. \quad (12)$$

Nous sommes près de notre but préliminaire; car (11) est — abstraction faite du terme  $\sigma^3$  — du second degré par rapport aux variables dépendantes et aux coefficients différentiels. On pourrait éliminer  $\sigma^3$  par l'intégrale de Jacobi, à la façon de Hill. On introduirait ainsi la constante  $C$  dans

les équations, et il faudrait plus tard démontrer la relation entre cette constante et les autres constantes d'intégration. Il est préférable de prendre  $\sigma^3$  pour variable au lieu de  $\sigma$ , en posant:

$$\sigma^3 = \varepsilon. \tag{13}$$

Avec la nouvelle variable  $\varepsilon$  notre système devient:

$$\left. \begin{aligned} (\omega - 1) \frac{d\varepsilon}{dl} &= -3\rho\varepsilon, \\ (\omega - 1) \frac{d\rho}{dl} &= \omega^2 - \rho^2 + \frac{3}{2} \cos 2l + \frac{1}{2} - \varepsilon, \\ (\omega - 1) \frac{d\omega}{dl} &= -2\rho\omega - \frac{3}{2} \sin 2l, \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

qui a la forme désirée. A ces équations il faut joindre l'intégrale de Jacobi

$$\frac{1}{2} \rho^2 + (\frac{1}{2} \omega^2 - \omega) - \frac{1}{4} (1 + 3 \cos 2l) + (\frac{1}{2} C \varepsilon^{\frac{2}{3}} - \varepsilon) = 0, \tag{15}$$

dont aucun usage n'a été fait pour les réductions.

Notre but est de satisfaire à (14) par des séries de la forme

$$\rho = i \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{\frac{inl}{k}}, \quad \omega = \sum_{-\infty}^{\infty} b_n e^{\frac{inl}{k}}, \quad \varepsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{inl}{k}}, \tag{16}$$

où  $k$  désigne un paramètre réel; le signe de sommation porte sur  $n$ .

Toutes les orbites possibles pourront être représentées par des séries de la forme (16). Si l'orbite considérée est périodique, et cela de façon qu'elle est parcourue pour  $l$  toujours croissante (ou toujours décroissante), les séries (16) convergent pour toute l'étendue de l'orbite. Dans le cas contraire, les séries convergent encore, mais seulement pour une certaine partie de l'orbite. Toutefois, comme on connaît *à priori* peu de chose de la forme des orbites dans le problème des trois corps, on ne pourra mieux faire que d'employer les séries trigonométriques pour leur représentation. Dans ce qui suit, nous laisserons de côté les questions de convergence, notre but principal étant la détermination numérique des coefficients de nos séries.

L'insertion des séries (16) dans (14) fournit les formules récurrentes suivantes :

$$-mc_m + \Sigma c_n(3ka_{m-n} + nb_{m-n}) = 0, \quad (17)$$

$$-kc_m - ma_m + \Sigma(ka_n a_{m-n} + kb_n b_{m-n} + na_n b_{m-n}) = 0, \quad (18)$$

$$-mb_m + \Sigma b_{m-n}(2ka_n + nb_n) = 0, \quad (19)$$

où, pourtant, nous n'avons pas encore tenu compte des termes  $\frac{3}{2} \cos 2l$ ,  $-\frac{3}{2} \sin 2l$  et  $\frac{1}{2}$  dans (14). Chacune des équations (17)—(19) représente une infinité de formules, car  $m$  désigne tout entier, positif ou négatif. Le signe  $\Sigma$  porte sur  $n$ .

Si  $k$  est la moitié d'un entier, les termes  $\frac{3}{2} \cos 2l$ ,  $-\frac{3}{2} \sin 2l$  et  $\frac{1}{2}$  fournissent les corrections suivantes aux premiers membres de (18) et (19):

$m$	Corr. de (18)	Corr. de (19)	}	(19 <sup>a</sup> )
0	$+\frac{1}{2}k$	0		
$2k$	$+\frac{3}{4}k$	$-\frac{3}{4}k$		
$-2k$	$+\frac{3}{4}k$	$+\frac{3}{4}k$		

Si  $k$  n'est pas la moitié d'un entier, il est encore possible de trouver les corrections, mais il faudra alors d'abord développer  $\cos 2l$  et  $\sin 2l$  en séries de Fourier suivant les multiples de  $\frac{l}{k}$ . Nous ne nous en occuperons pas ici, et nous nous bornerons au cas où  $k$  est la moitié d'un entier.

On voit aisément que les séries (16) seront réelles si

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \dot{a}_n + ia'_n, & b_n &= \beta_n + i\beta'_n, & c_n &= \gamma_n + i\gamma'_n, \\ a_{-n} &= -\dot{a}_n + ia'_n, & b_{-n} &= \beta_n - i\beta'_n, & c_{-n} &= \gamma_n - i\gamma'_n, \end{aligned} \right\} (20)$$

où les lettres grecques désignent des nombres réels. Dans ce qui suit nous supposons les coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$  réels, conditions qui sont compatibles avec les équations différentielles. Avec cette limitation, le calcul des coefficients est relativement simple; — je ne dis pas qu'il soit impraticable dans le cas général.

La dernière limitation donne:

$$a_n = -a_{-n}, \quad b_n = b_{-n}, \quad c_n = c_{-n}. \quad (21)$$

La série pour  $\rho$  contient donc seulement des *sinus*, les deux autres seulement des *cosinus*.

Le nombre  $k$  introduit plus haut est évidemment d'importance pour la forme des orbites (questions de périodicité et de symétrie). C'est pourquoi nous proposerons pour  $k$  un nom spécial, en l'appelant „l'indice“ de l'orbite. L'indice pourra toujours être pris positif, parce que  $n$  prend toutes les valeurs positives et négatives. Dans la terminologie adoptée jusqu'ici, la classe d'orbites considérée par Hill a l'indice  $\frac{1}{2}$ , et le développement se fait suivant les cosinus (sinus) des multiples de  $l : \frac{1}{2}$ . Il semble plus naturel de dire, dans ce cas fondamental, que les séries procèdent suivant les multiples pairs de  $l$ , et que cette classe d'orbites a l'indice un. Par analogie, nous supposerons dans tout ce qui suit que l'indice  $k$  est un entier positif, et que  $n$  et  $m$  désignent des entiers pairs. Il y a là évidemment une simple question de terminologie.

En rappelant la signification de  $\rho$ ,  $\omega$  et  $\varepsilon$ , nous pouvons ensuite écrire (16), pour les cas considérés :

$$\rho = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = -2 \sum_2^{\infty} a_n \sin \frac{nl}{k}, \quad (22)$$

$$\omega = 1 + \frac{dl}{dt} = b_0 + 2 \sum_2^{\infty} b_n \cos \frac{nl}{k}, \quad (23)$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r^3} = c_0 + 2 \sum_2^{\infty} c_n \cos \frac{nl}{k}. \quad (24)$$

Si l'on suppose que les séries (22)—(24) convergent pour toutes les valeurs réelles de  $l$ , on aura, par des considérations élémentaires que j'omettrai ici, les deux théorèmes suivants :

- 1<sup>o</sup> Les orbites à l'indice impair sont symétriques par rapport à l'axe des  $p$  et aussi à l'axe des  $q$ , tandis que les orbites à l'indice pair sont symétriques seulement par rapport à l'axe des  $p$ .
- 2<sup>o</sup> Les orbites à l'indice des formes  $2x + 1$  et  $4x + 2$  seront

périodiques dans  $2x + 1$  révolutions; les orbites à l'indice  $4x$  seront périodiques dans  $2x$  révolutions.

Même dans le cas où les séries (22)—(24) seraient seulement semi-convergentes, les théorèmes 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> subsisteraient encore pour les orbites intermédiaires qu'on obtiendrait en se contentant d'un nombre défini de termes des séries.

Nous allons adapter nos formules aux calculs numériques. Si, dans la formule (17), on change  $m$  en  $-m$ , on obtient:

$$mc_{-m} + \sum c_n (3ka_{-m-n} + nb_{-m-n}) = 0. \quad (25)$$

En changeant  $n$  en  $-n$  (ce qui est permis,  $n$  parcourant les valeurs positives et négatives) on voit [par (21) que (25) est identique à (17). Il suffit donc, dans (17), de faire  $m$  un nombre pair positif (ou nul). On obtient le même résultat pour (18) et (19), même en tenant compte des corrections (19<sup>a</sup>). On pourra ainsi écrire les équations (17)—(19), sous la forme suivante, où  $m$  et  $\nu$  désignent des nombres pairs et positifs (ou nuls):

$$\left. \begin{aligned} -mc_m + \sum_0^m c_\nu (3ka_{m-\nu} + \nu b_{m-\nu}) + \\ + \sum_2^\infty [3k(c_\nu a_{m+\nu} - a_\nu c_{m+\nu}) + (m+\nu)c_{m+\nu} b_\nu - \nu c_\nu b_{m+\nu}] = 0. \end{aligned} \right\} (26)$$

$$\left. \begin{aligned} -kc_m - ma_m + \sum_0^m (ka_\nu a_{m-\nu} + kb_\nu b_{m-\nu} + \nu a_\nu b_{m-\nu}) + \\ + \sum_2^\infty [2k(b_\nu b_{m+\nu} - a_\nu a_{m+\nu}) + \nu a_\nu b_{m+\nu} + (m+\nu)a_{m+\nu} b_\nu] = 0. \end{aligned} \right\} (27)$$

$$\left. \begin{aligned} -mb_m + \sum_0^m b_{m-\nu} (2ka_\nu + \nu b_\nu) + \\ + \sum_2^\infty [2k(a_{m+\nu} b_\nu - a_\nu b_{m+\nu}) + mb_\nu b_{m+\nu}] = 0. \end{aligned} \right\} (28)$$

Les corrections (19<sup>a</sup>) deviennent:

$$\left. \begin{array}{ccc} m & \text{Corr. de (27)} & \text{Corr. de (28)} \\ 0 & + \frac{1}{2} k & 0 \\ 2k & + \frac{3}{4} k & - \frac{3}{4} k \end{array} \right\} (28^a)$$

Pour  $m = 0$  (26) et (28) sont identiquement nulles, tandis que (27) donne



$$\frac{1}{2}k - kc_0 + kb_0^2 + \sum_2^{\infty} (-2ka_{\nu}^2 + 2kb_{\nu}^2 + 2\nu a_{\nu} b_{\nu}) = 0. \quad (29)$$

On peut traiter les équations (26)–(28) d’une manière tout à fait analogue à celle dont s’est servi Hill dans ses „Researches in the Lunar Theory“.

Soit „l’ordre“ d’un terme égal à la somme des indices des facteurs contenus dans ce terme ( $a_{\nu} b_n$  de l’ordre  $\nu + n$ , etc.). Alors on peut rejeter, en première approximation, les sommes infinies  $\sum_2^{\infty}$ ; car elles sont de l’ordre  $m + 4$ , tandis que les termes retenus sont de l’ordre  $m$ . On obtient ainsi les équations

$$\left. \begin{aligned} -mc_m + \sum_0^m c_{\nu} (3ka_{m-\nu} + \nu b_{m-\nu}) &= 0, \\ -kc_m - ma_m + \sum_0^m (ka_{\nu} a_{m-\nu} + kb_{\nu} b_{m-\nu} + \nu a_{\nu} b_{m-\nu}) &= 0, \\ -mb_m + \sum_0^m b_{m-\nu} (2ka_{\nu} + \nu b_{\nu}) &= 0, \end{aligned} \right\} (30)$$

auxquelles il faut joindre les corrections (28<sup>a</sup>). Pour illustration, écrivons les premières de ces équations pour le cas de  $k = 1$ :

$$\frac{1}{2} + b_0^2 - c_0 = 0, \quad (30^0)$$

$$\left. \begin{aligned} 3a_2 c_0 + 2c_2 (b_0 - 1) &= 0, \\ 2a_2 (b_0 - 1) + 2b_2 b_0 - c_2 &= -\frac{3}{4}, \\ 2a_2 b_0 + 2b_2 (b_0 - 1) &= \frac{3}{4}, \end{aligned} \right\} (30^2)$$

$$\left. \begin{aligned} 3a_4 c_0 + 4c_4 (b_0 - 1) &= -c_2 (3a_2 + 2b_2), \\ 4a_4 (b_0 - 1) + 2b_4 b_0 - c_4 &= -(a_2 + b_2)^2, \\ 2a_4 b_0 + 4b_4 (b_0 - 1) &= -2b_2 (a_2 + b_2). \end{aligned} \right\} (30^4)$$

On voit que le nombre des inconnues excède d’un celui des équations; l’une des inconnues pourra donc être choisie arbitrairement. Si l’on choisit  $b_0$  ou  $c_0$  arbitrairement, on trouve les autres coefficients de la première approximation par des solutions successives de systèmes d’équations linéaires à trois inconnues.

Il est indispensable d'examiner la signification de la constante arbitraire (la constante d'intégration). Le théorème de Fourier, appliqué à (23) et (24), donne pour  $k = 1$  :

$$b_0 - 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\omega - 1) dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{dt} dl, \quad (31)$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon dl = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{r^3}. \quad (32)$$

Il s'ensuit que  $b_0 - 1$  est une sorte de moyen mouvement synodique, et  $b_0$ , par conséquent, une sorte de moyen mouvement sidérique, tandis que  $c_0$  est une sorte de moyenne de  $\frac{1}{r^3}$ . Ces moyennes ne sont pourtant pas le moyen mouvement et la distance moyenne ordinaires de l'astronomie. Pour ces dernières, le temps figure comme variable indépendante dans les intégrales définies. On trouve, par exemple, pour le moyen mouvement synodique  $\nu_0$ , en désignant la période de révolution par  $T$ , l'expression.

$$\nu_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dl}{dt} dt, \quad (33)$$

qui n'est pas, en général, identique à (31). Si l'on veut exprimer  $\nu_0$  par les variables employées ici, on trouve :

$$\nu_0 = \frac{2\pi}{t_{l=2\pi} - t_{l=0}} = \frac{1}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{\omega - 1}}. \quad (34)$$

Dans les cas particuliers observés dans la nature,  $\nu_0$  et  $b_0 - 1$  ne sont d'ailleurs pas très différents, comme nous verrons plus loin.

Dans les mémoires de Hill,  $\nu_0$  figure comme constante d'intégration. Du point de vue où nous nous sommes placés, il est plus naturel de retenir  $b_0$  comme constante arbitraire. Si, après avoir calculé l'orbite pour une certaine valeur de  $b_0$ , on désire connaître le moyen mouvement correspondant, on pourra aisément calculer  $\nu_0$  par (34).

Revenons au calcul des coefficients. En procédant par approximations successives, on posera d'abord, comme nous l'avons dit,  $\sum_2^\infty = 0$ ; on obtient ainsi les coefficients de la première approximation.

Dans la seconde approximation on calculera, au moyen des coefficients de la première approximation, les sommes infinies d'abord rejetées; cela nous donnera les coefficients de la seconde approximation.

Dans les approximations qui suivent on recalculera, chaque fois, par les valeurs obtenues précédemment, les éléments qui ont été connus jusqu'ici avec une approximation moindre, et ainsi de suite.

Pour les besoins de la pratique on changera un peu la forme de nos formules. Introduisons les notations suivantes:

$$\left. \begin{aligned} S_m &= \sum_2^{m-2} c_\nu (3ka_{m-\nu} + \nu b_{m-\nu}), \\ S'_m &= \sum_2^{m-2} (ka_\nu a_{m-\nu} + kb_\nu b_{m-\nu} + \nu a_\nu b_{m-\nu}), \\ S''_m &= \sum_2^{m-2} b_{m-\nu} (2ka_\nu + \nu b_\nu), \end{aligned} \right\} (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta S_m &= \sum_2^\infty [3k(c_\nu a_{m+\nu} - a_\nu c_{m+\nu}) + (m+\nu)c_{m+\nu} b_\nu - \nu c_\nu b_{m+\nu}], \\ \Delta S'_m &= \sum_2^\infty [2k(b_\nu b_{m+\nu} - a_\nu a_{m+\nu}) + \nu a_\nu b_{m+\nu} + (m+\nu)a_{m+\nu} b_\nu], \\ \Delta S''_m &= \sum_2^\infty [2k(a_{m+\nu} b_\nu - a_\nu b_{m+\nu}) + mb_\nu b_{m+\nu}], \end{aligned} \right\} (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \Sigma_m &= S_m + \Delta S_m, \\ \Sigma'_m &= S'_m + \Delta S'_m, \\ \Sigma''_m &= S''_m + \Delta S''_m, \end{aligned} \right\} (37)$$

Les équations (26)–(28) pourront alors s'écrire:

$$\left. \begin{aligned} 3kc_0 a_m + m(b_0 - 1)c_m + \Sigma_m &= 0, \\ m(b_0 - 1)a_m + 2kb_0 b_m - kc_m + \Sigma'_m &= 0, \\ 2ka_m b_0 + m(b_0 - 1)b_m + \Sigma''_m &= 0. \end{aligned} \right\} (38)$$

La forme des équations par rapport à  $a_m$ ,  $b_m$  et  $c_m$  est linéaire. En résolvant, on obtient  $a_m$ ,  $b_m$  et  $c_m$  exprimés par les coefficients précédents et par des quantités de l'ordre  $m + 4$  au moins.

Écrivons, pour abrégé,

$$D_m = m(b_0 - 1)[m^2(b_0 - 1)^2 + k^2(3c_0 - 4b_0^2)], \quad (39)$$

alors la solution sera :

$$\left. \begin{aligned} a_m &= [-km(b_0 - 1)\Sigma'_m - m^2(b_0 - 1)^2\Sigma'_m + 2kmb_0(b_0 - 1)\Sigma''_m]D_m^{-1}, \\ b_m &= [2k^2b_0\Sigma'_m + 2kmb_0(b_0 - 1)\Sigma'_m - (3k^2c_0 + m^2(b_0 - 1)^2)\Sigma''_m]D_m^{-1}, \\ c_m &= [(4k^2b_0^2 - m^2(b_0 - 1)^2)\Sigma'_m + 3kmc_0(b_0 - 1)\Sigma'_m - 6k^2b_0c_0\Sigma''_m]D_m^{-1}. \end{aligned} \right\} (40)$$

Pour  $m = 2k$  on devra augmenter  $S'_m$  par  $\frac{3}{4}k$ , et  $S''_m$  par  $-\frac{3}{4}k$ . Pour  $m = 0$  il y a seulement une équation, soit (29), qui ne subira aucun changement.

Dans la première approximation on pose  $\Sigma'_m = S_m$  etc., en continuant de la manière indiquée ci-dessus. On aura une idée de la convergence rapide des séries ainsi obtenues en prenant un exemple numérique. Choisissons le cas de  $k = 1$ ,  $b_0 = 13.37$ . Les recherches de Hill et de Poincaré ont mis hors de doute l'existence des orbites périodiques à indice *un* pour les valeurs de  $b_0$  au voisinage de 13.37. Les formules pour  $S$  et  $\Delta S$  seront, dans ce cas particulier, si l'on néglige les quantités d'ordre 8,

$$\begin{aligned} S_2 &= 0 & S_4 &= c_2(3a_2 + 2b_2) \\ S'_2 &= \frac{3}{4} & S'_4 &= (a_2 + b_2)^2 \\ S''_2 &= -\frac{3}{4} & S''_4 &= 2b_2(a_2 + b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= c_2(3a_4 + 2b_4) + c_4(3a_2 + 4b_2) \\ S'_6 &= 2(a_2 + b_2)(a_4 + b_4) + 2a_4b_2 \\ S''_6 &= 2b_2(a_4 + 3b_4) + 2a_2b_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_2 &= 3c_2a_4 - 3a_2c_4 + 4c_4b_2 - 2c_2b_4 \\ \Delta S'_2 &= 2b_2b_4 - 2a_2a_4 + 2a_2b_4 + 4a_4b_2 \\ \Delta S''_2 &= 2a_4b_2 - 2a_2b_4 + 2b_2b_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_4 &= 3c_2 a_6 - 3a_2 c_6 + 6c_6 b_2 - 2c_2 b_6 \\ \Delta S'_4 &= 2b_2 b_6 - 2a_2 a_6 + 2a_2 b_6 + 6a_6 b_2 \\ \Delta S''_4 &= 2a_6 b_2 - 2a_2 b_6 + 4b_2 b_6 \end{aligned}$$

Nous donnons ci-dessous un tableau des coefficients numériques, arrangé de façon à faire voir l'amélioration obtenue dans chaque approximation:

<b>k = 1.</b>	<b>b<sub>0</sub> = 13·37</b>	179·25690	a <sub>0</sub> = 0
		— ·02873	
		— ·00002	
		c <sub>0</sub> = 179·22815	
	·126291	1·93018	— ·088797
+	·000033	+	·00025
	b <sub>2</sub> = ·126324	c <sub>2</sub> = 1·93043	a <sub>2</sub> = — ·088825
	b <sub>4</sub> = — ·000241	c <sub>4</sub> = — ·00047	a <sub>4</sub> = ·000093
	b <sub>6</sub> = ·000002	c <sub>6</sub> = ·00001	a <sub>6</sub> = — ·000001

On voit que deux améliorations suffiront pour donner c<sub>0</sub>, et une amélioration pour donner a<sub>2</sub>, b<sub>2</sub> et c<sub>2</sub> avec l'exactitude désirée, tandis que les autres coefficients seront obtenus corrects du premier abord.

Les séries (22)–(24), donnant la solution du problème, auront donc, dans notre cas particulier, la forme suivante:

$$\left. \begin{aligned} \rho = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} &= \begin{array}{l} \cdot 177650 \sin 2l \\ - \cdot 000185 \sin 4l \\ + \cdot 000001 \sin 6l \end{array} \quad \omega = 1 + \frac{dl}{dt} = 13 \cdot 37 \\ &\quad \begin{array}{l} + \cdot 252648 \cos 2l \\ - \cdot 000483 \cos 4l \\ + \cdot 000004 \cos 6l \end{array} \\ \varepsilon = \frac{1}{r^3} &= 179 \cdot 22815 \\ &\quad \begin{array}{l} + 3 \cdot 86085 \cos 2l \\ - \cdot 00094 \cos 4l \\ + \cdot 00001 \cos 6l \end{array} \end{aligned} \right\} (41)$$

On calcule ensuite la constante de Jacobi par l'équation

$$C = (2\varepsilon + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos 2l + 2\omega - \omega^2 - \rho^2) \varepsilon^{-\frac{3}{2}}. \quad (42)$$

Pour  $l = 0$  on trouve, au moyen de logarithmes à huit décimales,

$$C = 6.5085375.$$

On trouve de plus, pour l'argument correspondant à  $\cos 2l = 0.6$ ,  $\sin 2l = 0.8$ ,

$$C = 6.5085394.$$

Enfin,  $l = \frac{\pi}{2}$  donne

$$C = 6.5085384.$$

La différence entre ces valeurs n'est pas plus grande qu'on ne devait s'y attendre en tenant compte de l'approximation à laquelle nous nous sommes bornés. Le calcul de  $C$  pour un nombre de valeurs distinctes de l'argument fournit un bon contrôle de l'exactitude des résultats parce qu'aucun usage n'a été fait de l'intégrale de Jacobi pour la réduction des équations. Ce contrôle même est quelquefois la seule indication que nous possédions de la convergence ou, au moins, de la semi-convergence des séries.

Des formules (41), la plus intéressante est la série pour  $\varepsilon$ , cette série donnant l'équation de l'orbite. Un examen des coefficients numériques nous fait voir qu'en représentant l'orbite par une équation de la forme

$$\frac{1}{r^3} = c_0 + 2c_2 \cos 2l \quad (43)$$

l'erreur commise sur  $\varepsilon$  sera, à peu près,  $\frac{\varepsilon}{200000}$ , d'où il suit que l'erreur sur le rayon vecteur sera seulement  $\frac{1}{600000}$  de celui-ci. Ce résultat semble remarquable au point de vue des applications. On ne connaît guère la distance de notre lune à  $\frac{1}{600000}$  près ( $\frac{2}{3}$  de kilomètre). On pourrait donc tenir compte de la perturbation connue sous le nom de „variation” en choisissant pour „orbite intermédiaire” (dans le

sens de *Gylden*) une courbe de la forme (43). On voit du reste que cette courbe est une courbe algébrique du sixième degré. Il serait difficile de trouver une plus simple représentation; car si l'on ne veut pas se contenter de représenter l'orbite par un cercle, il faut introduire au moins *un* terme périodique qui, si l'on choisit la forme (43), suffira pour satisfaire aux observations.

La série que nous avons trouvée pour  $\varepsilon$  doit être comparée avec une série pour  $\frac{1}{r^3}$  qui a été donnée par Hill (*Collected Works I* p. 325). Cette série est développée suivant les cosinus des multiples de la longitude moyenne  $\tau = \nu_0 t$ . On déduit de la série de Hill (qui a été donnée avec un plus grand nombre de décimales) la série suivante:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r^3} &= 179.22422 \\ &+ 3.86040 \cos 2\tau \\ &+ 0.03848 \cos 4\tau \\ &+ 0.00037 \cos 6\tau \end{aligned} \right\} (44)$$

La convergence — quoique très remarquable — n'est pas aussi rapide que la convergence de (41). On ne retrouve pas, dans (44), le saut brusque de  $c_2$  à  $c_4$ . Le coefficient de  $\cos 4l$  est seulement  $\frac{1}{40}$  du coefficient de  $\cos 4\tau$ , tandis que les coefficients premier et second sont à peu près les mêmes dans les deux séries. Ce saut brusque ne se trouve pas non plus dans les autres séries de Hill qui, du reste, convergent un peu plus rapidement que (44). Aussi il disparaîtra si, de la série pour  $\varepsilon$ , on déduit les séries pour  $\frac{1}{r}$  et  $\frac{1}{r^2}$  en fonction de  $l$ . Il semble donc que notre choix de variables se prête bien aux besoins de la pratique.

Nous avons supposé plus haut que  $b_0 - 1$  est peu différent du moyen mouvement synodique  $\nu_0$ ; reste à vérifier cette supposition par le calcul. Nous pouvons calculer  $\nu_0$  par (34), par exemple en développant  $\frac{1}{\omega - 1}$  en série périodique. Soit

$$\frac{1}{\omega - 1} = g_0 + g_2 \cos 2l + g_4 \cos 4l + g_6 \cos 6l. \quad (45)$$

On trouve par (41) la valeur de  $\frac{1}{\omega - 1}$  pour  $l = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ . Il vient:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{\omega - 1}\right)_0 &= g_0 + g_2 + g_4 + g_6 = \cdot 07922569 \\ \left(\frac{1}{\omega - 1}\right)_{\frac{\pi}{2}} &= g_0 - g_2 + g_4 - g_6 = \cdot 08252960 \\ \left(\frac{1}{\omega - 1}\right)_{\frac{\pi}{4}} &= g_0 \quad \quad - g_4 = \cdot 08083758 \\ \left(\frac{1}{\omega - 1}\right)_{\frac{\pi}{6}} &= g_0 + \frac{1}{2}g_2 - \frac{1}{2}g_4 - g_6 = \cdot 08002201 \end{aligned} \right\} (46)$$

En résolvant, on aura

$$\left. \begin{aligned} g_0 &= \cdot 08085761 \\ g_2 &= - \cdot 00165169 \\ g_4 &= \cdot 00002003 \\ g_6 &= - \cdot 00000026 \end{aligned} \right\} (47)$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dl}{\omega - 1} = g_0 = \cdot 08085761 \\ \nu_0 &= \frac{1}{g_0} = 12\cdot 36742 \end{aligned} \quad (48)$$

La valeur employée par Hill est

$$\nu_0 = 12\cdot 36874 \dots \quad (48^a)$$

en écrivant seulement les décimaux nécessaires pour la comparaison.

La valeur (48), employée par nous, s'accorde, en conséquence, à  $\frac{1}{10\,000}$  près, avec le moyen mouvement synodique observé de la lune, ce qui est suffisant pour la comparaison des méthodes.

L'introduction du temps dans nos formules ne donne lieu à aucune difficulté. Si  $l = 0$  correspond à  $t = 0$ , on aura:



$$t = \int_0^l \frac{dl}{\omega - 1}$$

ou :

$$t = g_0 l + \frac{1}{2} g_2 \sin 2l + \frac{1}{4} g_4 \sin 4l + \frac{1}{6} g_6 \sin 6l. \quad (49)$$

Avec les coefficients numériques cela deviendra :

$$\left. \begin{aligned} t &= \cdot 08085761 l \\ &\quad - \cdot 00082585 \sin 2l \\ &\quad + \cdot 00000501 \sin 4l \\ &\quad - \cdot 00000004 \sin 6l \end{aligned} \right\} (50)$$

Si l'on veut calculer la valeur de  $l$  pour une certaine valeur de  $t$ , on pourra l'obtenir par une interpolation très simple. On pourra aussi sans peine renverser la série (50) et donner ainsi  $l$  en fonction explicite de  $t$ .

Les pages qui précèdent sont seulement une introduction à une théorie générale. Une extension importante serait le calcul des orbites à indice supérieur à  $un$ ; en essayant de les calculer on rencontre dès le début des circonstances particulières que j'espère exposer à une autre occasion.

Copenhague, 8 Février 1909.